Etude de fonction

1. Savoir

1.1. Vocabulaire

Soient f et g, deux fonctions numériques définies respectivement sur D_f et D_g, (C) et (C') les courbes représentatives de f et g, et soient m et M, deux réels :

Etude sur…	f est…	si et seulement si, pour tout x, on a…	Conséquence graphique…
La parité	paire	$f(-x) = f(x)$	(C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
	impaire	$f(-x) = -f(x)$	(C) est symétrique par rapport à l'origine
Les bornes	majorée	$f(x) \leq M$	La droite d'équation $y = M$ est toujours située au-dessus de f(x)
	minorée	$m \leq f(x)$	La droite d'équation $y = m$ est toujours située au-dessous de f(x)
	bornée	$m \leq f(x) \leq M$	Les droites d'équation $y_1 = m$ et $y_2 = M$ bornent f(x)
Comparaison entre fonctions	au-dessus de g	$f(x) \geq g(x)$	Sauf aux points d'intersections (s'ils existent) f(x) est toujours située au-dessus de g(x)
	au-dessous de g	$f(x) \leq g(x)$	Sauf aux points d'intersections (s'ils existent) f(x) est toujours située au-dessous de g(x)
	égale à g	$D_f = D_g$ $f(x) = g(x)$	(C) et (C') sont confondues
	Une restriction de g	$D_f \subset D_g$ $f(x) = g(x)$	(C) est incluse dans (C')

1.2. Transformations sur une courbe

Soit $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan et a, h, α, β appartenant à $\mathbb{R}$…

1.2.1. Cas général

Type de transformation		Si on a…	Conséquence graphique…
Translation		$g(x) = f(x - a)$	Translation de vecteur $\binom{a}{0}$ ou $a\vec{\imath}$
		$g(x) = f(x + a)$	Translation de vecteur $\binom{-a}{0}$ ou $-a\vec{\imath}$
		$g(x) = f(x) + a$	Translation de vecteur $\binom{0}{a}$ ou $a\vec{\jmath}$
		$g(x) = f(x) - a$	Translation de vecteur $\binom{0}{-a}$ ou $-a\vec{\jmath}$
Symétrie	axiale	$g(x) = -f(x)$	Réflexion d'axe des x ou axe des abscisses
		$g(x) = f(-x)$	Réflexion d'axe des y ou axe des ordonnées
		$g(x) = \lvert f(x) \rvert$ C'est-à-dire $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) > 0 \\ -f(x) \text{ si } f(x) \leq 0 \end{cases}$	On conserve la partie de (C) située au-dessus de l'axe des abscisses puis on complète avec le symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, de la partie de (C) située au-dessous de cet axe
		$g(x) = f(\lvert x \rvert)$ C'est-à-dire La fonction est paire et pour tout x positif on a $g(x) = f(x)$	On conserve la partie de (C) située à droite de l'axe des ordonnées puis on complète avec le symétrique, par rapport à cet axe, de la partie de (C) que l'on a conservée
		$f(a + h) = f(a - h)$	$x = a$ est axe de symétrie
	centrale	$\frac{f(a + h) + f(a - h)}{2} = b$	Ω (a ;b) est centre de symétrie

1.2.2. Cas particulier

Si on a une…	d'équation…	l'image par la translation de vecteur $\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ est une…
Parabole	$y = ax^2$	Parabole d'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$
Hyperbole	$y = \frac{a}{x}$	Hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x - \alpha} + \beta$

Yves Romani – yves.romani@live.fr

1.3. Sens de variation

1.3.1. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, f est strictement croissante si et seulement si tout couple (a,b) d'éléments distincts de I vérifie :

$$\text{si } a < b \text{ alors } f(a) < f(b)$$

De la même façon, f est strictement décroissante si et seulement si tout couple (a,b) d'éléments distincts de I vérifie :

$$\text{si } a < b \text{ alors } f(a) > f(b)$$

1.3.2. Taux de variation

On appelle taux de variation de f entre a et b et on note T(a,b) le nombre, égal au coefficient directeur de (AB), défini par :

$$\boxed{T(a,b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}}$$

$T(a,b) > 0 \Leftrightarrow$ f est strictement croissante
$T(a,b) = 0 \Leftrightarrow$ f est constante
$T(a,b) < 0 \Leftrightarrow$ f est strictement décroissante

1.3.3. Fonctions composés

La fonction composé g∘f est définie, pour tout x, par : $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

Si f et g ont des sens de variations…	alors g∘f est…
identiques	croissante
différents	décroissante

1.4. Factoriser une fonction polynôme du second degré

On appelle discriminant le nombre :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$$

On peut alors écrire toute fonction de la forme $ax^2 + bx + c$ sous sa forme canonique :

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

Ou sous sa forme factorisée (lorsque $\Delta > 0$) :

$$f(x) = a(x - x1)(x - x2)$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ou encore, en posant $P = x_1x_2$ et $S = x_1 + x_2$:

$$f(x) = a(x^2 - Sx + P)$$

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

On peut également utiliser les identités remarquables :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

Yves Romani – yves.romani@live.fr

1.5. Le signe d'une fonction polynôme du second degré

1.5.1. $\Delta > 0$

Sur un intervalle I, le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

x	I_{min}		x_1		x_2		I_{max}
f(x)		Signe de a	ϕ	Signe de −a	ϕ	Signe de a	

1.5.2. $\Delta = 0$

Le polynôme n'a qu'une racine : $x_0 = \frac{-b}{2a}$, et se factorise sous la forme : $a(x - x_0)^2$.

x	I_{min}		x_0		I_{max}
f(x)		Signe de a	ϕ	Signe de a	

1.5.3. $\Delta < 0$

Le polynôme n'a aucune racine réelle et le signe de f(x) est celui de a.

1.5.4. Autre cas

On peut étudier le signe d'une fonction, sans utiliser le signe du discriminant, lorsque celle-ci a été factorisée (notamment grâce aux identités remarquables).

2. Savoir faire

2.1. Déterminer les bornes d'une fonction

Soit $f(x) = \frac{2}{x^2+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que 0 est un minorant de f(x)
- Montrer que $\frac{2}{3}$ est un majorant de f(x)
- En déduire que f(x) est bornée.

Corrigé :

- Il est clair que pour tout x : $\frac{2}{x^2+3} \geq 0$. Donc 0 est un minorant de f(x).
- Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$x^2 + 3 \geq 3$$

$$\frac{1}{x^2+3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{x^2+3} \leq \frac{2}{3}$$

Donc $\frac{2}{3}$ est un majorant de f(x).

- Comme f admet un minorant et un majorant, alors f est bornée.

2.2. Déterminer la parité d'une fonction

Soient

- $f(x) = x^3 - x$,
- $g(x) = x^2 - 1$ et
- $h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

Pour chaque fonction, étudier sa parité.

Corrigé :

- $f(x) = x^3 - x$

Or, $f(-x) = -x^3 + x = -f(x)$: la fonction est impaire

- $g(x) = x^2 - 1$

Or, $g(-x) = g(x)$: la fonction est paire

- $h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

$h(-x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$, ce qui est différent de h(x) ou de –h(x), donc h(x) n'est ni paire ni impaire.

Yves Romani – yves.romani@live.fr

2.3. Comparer des fonctions

Comparer les fonctions suivantes :

- $b(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ et $c(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-x}$
- $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$
- $m(x) = 2x^2 + x - 1$ et $n(x) = \frac{x^3-3x-2}{x+1}$
- $p(x) = \frac{3x^2-1}{x^2}$ et $q(x) = 5$
- $r(x) = \frac{x^3+x^2+4}{x+1}$ et $t(x) = x^2$

Corrigé :

- On peut écrire : $b(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}}{1-x} = c(x)$

Donc $b(x) = c(x)$.

De plus, $b(x)$ et $c(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}_+ - \{1\}$

On a donc : $D_g = D_f$.

On peut conclure que f est égale à g.

- On peut écrire : $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \times \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = g(x)$

Donc $b(x) = c(x)$.

De plus, $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+ - \{1\}$,

On a donc : $D_g \subset D_f$.

On peut conclure que g est une restriction de f.

- Calculons : $m(x) - n(x) = 2x^2 + x - 1 - \frac{x^3-3x-2}{x+1}$

$$= \frac{(x+1)(2x^2+x-1)}{x+1} - \frac{x^3-3x-2}{x+1} = \frac{2x^3+2x^2+x^2+x-x-1}{x+1} - \frac{x^3-3x-2}{x+1}$$

$$= \frac{2x^3+2x^2+x^2+x-x-1-x^3+3x+2}{x+1} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1} = \frac{(x+1)^3}{x+1} = (x+1)^2 \geq 0$$

Donc $m(x)$ est au-dessus de $n(x)$.

- Calculons : $p(x)-q(x) = \frac{3x^2-1}{x^2} - 5 = \frac{3x^2-1}{x^2} - \frac{5x^2}{x^2} = \frac{3x^2-1-5x^2}{x^2}$

$$= -\frac{2x^2+1}{x^2} \leq 0$$

Donc $p(x)$ est en-dessous de $q(x)$.

- Calculons : $r(x)-t(x) = \frac{x^3+x^2+4}{x+1} - x^2 = \frac{x^3+x^2+4}{x+1} - \frac{x^2(x+1)}{x^2}$

$$= \frac{x^3+x^2+4}{x+1} - \frac{x^3+x^2}{x+1} = \frac{x^3+x^2+4-x^3-x^2}{x+1} = \frac{4}{x+1}$$

Comme $4 > 0$, alors le signe de $\frac{4}{x+1}$ dépend de celui de x+1.

Or $x+1 < 0$ si et seulement si $x < -1$

et $x+1 > 0$ si et seulement si $x > -1$

On peut donc conclure le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $\frac{4}{x+1}$	-	Φ	+
positions	r est en-dessous de t		r est au-dessus de t

Note : pour étudier la position relative de deux courbes on étudie le signe de la différence. Quand cette différence est positive la première courbe est au-dessus de la seconde et inversement si la différence est négative.

Si la différence est nulle, alors il faudra déterminer si on est face à une égalité ou à une restriction.

2.4. Mettre en évidence un axe de symétrie

2.4.1. Déterminer l'équation d'un axe de symétrie s'il existe

Soient $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$ et (C) sa courbe représentative.

Montrer que (C) admet un axe de symétrie et donnez-en son équation.

Corrigé :

1ère méthode : équation a une inconnue

S'il existe un a tel que pour tout h appartenant à $\mathbb{R}$: $f(a+h) = f(a-h)$, alors la fonction admet un axe de symétrie d'équation $x = a$.

$f(a+h)= 4(a+h)^2+4(a+h)+5 = 4(a^2+2ah+h^2)+4a+4h+5 = 4h^2+h(8a+4)+4a^2+4a+5$

$f(a-h) = 4(a-h)^2 + 4(a-h) + 5 = 4(a^2-2ah+h^2)+4a-4h+5 = 4h^2+h(-8a-4)+4a^2+4a+5$

Donc $f(a+h) = f(a-h)$ si et seulement si

$$4h^2+h(8a+4)+4a^2+4a+5 = 4h^2+h(-8a-4)+4a^2+4a+5$$

$$8a+4 = -8a-4$$

$$a = \frac{-1}{2}$$

$x = \frac{-1}{2}$ est donc axe de symétrie

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

2nde méthode : changement de variables

Comme $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$ alors on a : $y = (2x+1)^2+4$, c'est-à-dire $y-4 = (2x+1)^2$.

On pose $X = 2x+1$ et $Y = y-4$ et on travaille maintenant dans un nouveau repère : $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(\frac{-1}{2}, 4\right)$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

(C) a maintenant pour équation : $Y = g(X)$ avec $g(X) = X^2$, la fonction g est donc paire et admet pour axe de symétrie l'axe $(\Omega, \vec{j})$ d'équation $x = \frac{-1}{2}$.

2.4.2. Vérifier si une droite est axe de symétrie

Soient $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$ et (C) sa courbe représentative.

Montrer que la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$ est axe de symétrie de (C).

Corrigé :

$x = a$ est axe de symétrie si et seulement si pour tout x on a : $f(2a-x) = f(x)$.

Ici, $x = \frac{-1}{2}$, donc : $f(2a-x) = f(-1-x) = 4(-1-x)^2+4(-1-x)+5 = 4x^2+4x+5 = f(x)$.

$x = \frac{-1}{2}$ est donc bien axe de symétrie.

2.5. Mettre en évidence un centre de symétrie

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3}$.

Montrer que l'origine est centre de symétrie.

Corrigé :

1ère méthode :

Si pour a et b donnés on a $\frac{f(a + h)+ f(a - h)}{2} = b$ pour tout h appartenant à $\mathbb{R}$, alors le point de coordonnées (a ;b) est centre de symétrie.

$$\frac{f(a + h)+ f(a - h)}{2} = \frac{f(h)+ f(- h)}{2} = \frac{\frac{h^3 - h^3}{3}}{2} = 0 = b$$

Donc le point O est centre de symétrie de f(x).

2^{nde} méthode :

Un point de coordonnées (a ; b) est centre de symétrie d'une droite d'équation y=f(x) définie sur D_f si et seulement si pour tout x appartenant à D_f, 2x-a appartient à D_f et si f(2a-x)+f(x) = 2b.

Ici, il est clair que 2x-a = 2x appartient à $\mathbb{R}$ (puisque x appartient à $\mathbb{R}$).

Et : $f(2a-x)+f(x) = f(-x)+f(x) = \frac{-x^3}{3}+\frac{x^3}{3} = 0 = 2b$

Le point O est donc centre de symétrie de f(x).

2.6. Tracer une parabole

Soit (P), la parabole d'équation $y = 2x^2-4x+6$, image par une translation de la parabole (C).

- Déterminer les coordonnées du vecteur de la translation et l'équation de la parabole d'origine (C).
- Tracer la parabole (P).

Corrigé :

- $2x^2-4x+6 = 2(x-1)^2+4$.

Les coordonnées du vecteur sont donc : $\binom{1}{4}$ et (C) a pour équation $y = 2x^2$.

2.7. Tracer une hyperbole

Soit (H), l'hyperbole d'équation $y = \frac{3x+1}{x-1}$, image par une translation de l'hyperbole (C).

- Déterminer les coordonnées du vecteur de la translation et l'équation de l'hyperbole d'origine (C).
- Tracer l'hyperbole (P).

Corrigé :

- $y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1}+\frac{2}{x-1} = \frac{2}{x-1}+3$

Les coordonnées du vecteur sont donc : $\binom{1}{3}$ et (C) a pour équation $y = \frac{2}{x-1}$

2.8. Calculer et utiliser un taux de variation

Calculer le taux de variation de la fonction $f(x) = 2x^2+1$:

- entre -1 et 0
- entre 0 et 1

En déduire le sens de variation de la fonction entre -1 et 1

Corrigé :

- $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ = f(0)-f(-1) = 1-3 = -2
- f(1)-f(0) = 3-1 = 2

On peut donc déduire le tableau de variation suivant

x	[-1 ; 0]	[0 ; 1]
Signe du taux de variation	-	+
f(x)	↘	↗

2.9. Résoudre une équation du second degré

Résoudre : x^2-5x+1 = 0

Corrigé :

Calculons le discriminant : Δ = b^2-4ac = 25-4 = 21

On a donc : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$

$$\text{D'où : } S = \left\{\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right\}$$

2.10. Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre sur ℝ : $2x^2+6x-8 \geq 0$

Corrigé :

Calcul du discriminant : Δ = 36+64 = 100

On a donc : $x_1 = \frac{-16}{4} = -4$ et $x_2 = \frac{4}{4} = 1$

De là :

x	-∞		-4		1		+∞
Signe de f(x)		+	ϕ	-	ϕ	+	

$$\text{D'où : } S = [-4, 1]$$

3. Démonstration du cours

3.1. Transformations sur une courbe

3.1.1. $g(x) = f(x-a)$ signifie que $f(x-a)$ est l'image de $g(x)$ par la translation de vecteur $a\vec{\imath}$

Soient C_f la courbe représentative de f et C_g la courbe représentative de g, M(x ; y) un point du plan et M'(x-a ; y) la translation de M par f.

Il est clair que M(x ;y) appartient à C_g si et seulement si $y = f(x\text{-}a)$ c'est-à-dire si et seulement si M'(x-a ; y) appartient à C_f avec $\overrightarrow{M'M}$ ayant pour coordonnées (x-(x-a) ; y-y) c'est-à-dire (a ; 0).

De là, $\overrightarrow{M'M} = a\vec{\imath}$, donc M est le translaté de M' par la translation de vecteur $a\vec{\imath}$.

Ainsi : f(x-a) est l'image de g(x) par la translation de vecteur $a\vec{\imath}$

3.1.2. $g(x) = f(x+a)$ signifie que $f(x+a)$ est l'image de $g(x)$ par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$

Soient C_f la courbe représentative de f et C_g la courbe représentative de g, M(x ; y) un point du plan et M'(x+a ; y) la translation de M par f.

Il est clair que M(x ;y) appartient à C_g si et seulement si $y = f(x+a)$ c'est-à-dire si et seulement si M'(x+a ; y) appartient à C_f avec $\overrightarrow{M'M}$ ayant pour coordonnées (x-(x+a) ; y-y) c'est-à-dire (-a ; 0).

De là, $\overrightarrow{M'M} = -a\vec{\imath}$, donc M est le translaté de M' par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.

Ainsi : f(x+a) est l'image de g(x) par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$

3.1.3. $g(x) = f(x)+a$ signifie que $f(x)+a$ est l'image de $g(x)$ par la translation de vecteur $a\vec{\jmath}$

Soient C_{f+a} la courbe représentative de f(x)+a et C_g la courbe représentative de g, M(x ; y) un point du plan et M'(x ; y+a) la translation de M par f(x)+a.

Il est clair que M(x ; y) appartient à C_{f+a} si et seulement si $y = f(x)+a$ c'est-à-dire si et seulement si M'(x ; y-a) appartient à C_f. On a alors : $\overrightarrow{M'M}$ ayant pour coordonnées (x-x ; y-(y-a)) c'est-à-dire (0 ; a).

De là, $\overrightarrow{M'M} = a\vec{\jmath}$.

Ainsi : f(x)+a est l'image de g(x) par la translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.

3.1.4. $g(x) = f(x)-a$ signifie que $f(x)+a$ est l'image de $g(x)$ par la translation de vecteur $-a\vec{\jmath}$

Soient C_{f-a} la courbe représentative de f(x)-a et C_g la courbe représentative de g, M(x ; y) un point du plan et M'(x ; y-a) la translation de M par f(x)-a.

Il est clair que M(x ; y) appartient à C_{f-a} si et seulement si y = f(x)-a c'est-à-dire si et seulement si M'(x ; y+a) appartient à C_f. On a alors : $\overrightarrow{M'M}$ ayant pour coordonnées (x-x ; y-(y+a)) c'est-à-dire (0 ; -a).

De là, $\overrightarrow{M'M} = -a\vec{j}$.

Ainsi : f(x)-a est l'image de g(x) par la translation de vecteur $-a\vec{j}$.

3.1.5. Si g(x) = -f(x) alors f(x) est le symétrique de g(x) par l'axe des abscisses

Soit M(x ; y) un point du plan, C_g la courbe représentative de g et C_{-f} celle de –f.

M(x ; y) appartient à C_{-f} si et seulement si y = -f(x) c'est-à-dire si et seulement si –y = f(x) ce qui est équivalent à dire que M'(x ; -y) appartient à C_f.

De là, on a $\overrightarrow{M'M}$ a pour coordonnées (x-x ; y-(-y)) c'est-à-dire (0 ; 2y) donc $\overrightarrow{M'M} \perp \vec{\imath}$ et donc M est le symétrique de M' par rapport à l'axe des abscisses.

3.1.6. Si g(x) = f(-x) alors f(-x) est le symétrique de g(x) par l'axe des ordonnées

Soit M(x ; y) un point du plan, C_g la courbe représentative de g et C_f celle de f.

M(x ; y) appartient à C_f si et seulement si y = f(-x) c'est-à-dire si et seulement si M'(-x ; y) appartient à C_f.

De là, on a $\overrightarrow{M'M}$ a pour coordonnées (x-(-x) ; y-y) c'est-à-dire (2x ; 0) donc $\overrightarrow{M'M} \perp \vec{\jmath}$ et donc M est le symétrique de M' par rapport à l'axe des ordonnées.

3.2. Le taux de variation entre a et b est égal au coefficient directeur de (AB)

La droite (AB) a une équation de la forme y = mx+p.
Comme elle passe par B, on a : f(b) = mb+p
De la même façon : f(a) = ma+p
On peut donc poser le système suivant :

$$\begin{cases} f(b) & = & mb + p \\ f(a) & = & ma + p \end{cases}$$

Par soustraction on obtient : f(b)-f(a) = mb-ma = m(b-a), d'où $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

3.3. Sens de variation de fonction composées

3.3.1. Si f et g ont des sens de variations identiques alors g∘f est croissante

3.3.1.1. Si f et g sont croissantes

Supposons f et g croissantes respectivement sur l'intervalle I et J (avec J contenant les images de I par f).

Soient a et b appartenant à I et tels que $a < b$, comme f est croissante sur I alors $f(a) < f(b)$, comme f(a) et f(b) sont contenus dans J et que g est croissante, alors :

$g[f(a)] < g[f(b)]$ ce qui équivaut à $g \circ f(a) < g \circ f(b)$

Il est clair que les images par g∘f sont rangées dans le même ordre que leurs antécédents,

donc g∘f est croissante sur I

3.3.1.2. Si f et g sont décroissantes

Supposons f et g décroissantes respectivement sur l'intervalle I et J (avec J contenant les images de I par f).

Soient a et b appartenant à I et tels que $a < b$, comme f est décroissante sur I alors $f(a) > f(b)$, comme f(a) et f(b) sont contenus dans J et que g est décroissante, alors :

$g[f(a)] < g[f(b)]$ ce qui équivaut à $g \circ f(a) < g \circ f(b)$

Il est clair que les images par g∘f sont rangées dans le même ordre que leurs antécédents,

donc g∘f est croissante sur I

3.3.2. Si f et g ont des sens de variations différents alors g∘f est décroissante

Supposons f croissante sur un intervalle I et g décroissante sur un intervalle J qui contient les images de I par f.

Soient a et b appartenant à I et tels que $a < b$, comme f est croissante sur I alors $f(a) < f(b)$, comme f(a) et f(b) sont contenus dans J et que g est décroissante, alors :

$g[f(a)] \geq g[f(b)]$ ce qui équivaut à $g \circ f(a) \geq g \circ f(b)$ ou $g \circ f(b) \leq g \circ f(a)$

Il est clair que les images par g∘f sont rangées en ordre inverse de celles de f,

donc g∘f est décroissante sur I

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

3.4. Polynôme du second degré

3.4.1. $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (avec $a \neq 0$)

$$ax^2 + bx + c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2)$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

3.4.2. Si $\Delta > 0$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Soit $ax^2+bx+c = 0$, on a :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \text{ si et seulement si } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \text{ (car } a \neq 0)$$

Comme $\Delta > 0$, alors : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

$$= \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \text{ si et seulement si :}$$

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$x + = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

3.4.3. Si $\Delta < 0$ alors ax^2+bx+c ne se factorise pas

Si $\Delta < 0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et ne s'annule jamais.

3.4.4. Si $\Delta > 0$, alors le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines

Si $\Delta > 0$, alors on peut écrire $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Posons $x_1 < x_2$, on a :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x-x_1$	-	0	+		-
$x-x_2$	-		-	0	+
$(x-x_1)(x-x_2)$	+	0	-	0	+
$a(x-x_1)(x-x_2)$	Signe de a	0	signe de –a	0	signe de a

3.4.5. Si Δ = 0, le polynôme est du signe de a

Si $\Delta = 0$, alors on peut écrire $ax^2+bx+c = a(x + \frac{b}{2a})^2$ et le signe est clairement celui de a sauf pour $x_0 = \frac{-b}{2a}$ où le polynôme s'annule.

3.4.6. Si Δ < 0, le polynôme est du signe de a

Si $\Delta < 0$, alors $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est strictement positif et donc $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est toujours du signe de a.

Yves Romani – yves.romani@live.fr